Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices est interdit.

(Durée : 30 minutes)

NOM :	**Prénom :**	**Groupe :**	***Note (/20) :***

Bille sur un plateau tournant

Dans un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ considéré comme galiléen, un disque $(\mathcal{D})$, de centre O et de rayon R, tourne autour de son axe de révolution Oz, avec la vitesse angulaire constante ω. On associe au disque le repère cylindrique $\mathcal{R}'\left(O,\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_z}\right)$. Une bille M, assimilée à une masse ponctuelle m, est posée sur le disque, à $t=0$, en un point M_o tel que $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|_{t=0}=\left\|\overrightarrow{OM_o}\right\|=\rho_o=d<R$, sans vitesse initiale par rapport à $\mathcal{R}$. Le point M peut alors être caractérisé par les triplets cartésien $(x,y,0)$ dans $\mathcal{R}$, ou cylindrique $(\rho,\varphi,0)$ dans $\mathcal{R}'$.

On suppose que le disque est parfaitement lisse, de sorte qu'il n'existe aucune force de frottement exercée par $(\mathcal{D})$ sur M, en contact permanent avec $(\mathcal{D})$.

On note $\vec{g}=-g\overrightarrow{e_z}$ le champ de pesanteur terrestre.

a) Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}$

1- Déterminer (et justifier) les expressions des deux forces s'exerçant sur M dans $\mathcal{R}$.

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

Pas de frottements $\Rightarrow \vec{R} \perp$ déplacement $\Rightarrow \vec{R} \perp xOy \Rightarrow \vec{R} = R\vec{e_z}$

($\mathcal{R}$ galiléen $\Rightarrow$ que les forces vraies)

2- Déduire de la RFD l'expression de l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

$\Sigma\vec{F}(M/R) = m\vec{a}(M/R) \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R} = m\vec{a}$

$\Rightarrow$ Par projection, $a_x=0$, $a_y=0$ et le mvt est ds le plan $xOy \Rightarrow z=cte$ et $a_z=0 \Rightarrow \vec{a}(M/R)=\vec{0}$.

3- Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$.

$\vec{v}(M/R) = \vec{cte} = \left[\vec{v}(M/R)\right]_{t=0} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{cte} = (\overrightarrow{OM})_{t=0} = \overrightarrow{OM_0}$

Donc $\begin{cases} x(t) = x_0 = cte \\ y(t) = y_0 = cte \end{cases}$

4- Quel est le mouvement décrit par M dans $\mathcal{R}$?

M est immobile dans $\mathcal{R}$.

b) Caractéristiques de $\mathcal{R}'$:

1- Le repère $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Justifier.

R' en rot / R galiléen $\Rightarrow$ R' est non galiléen.

2- Caractériser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$: vitesse de son origine, vitesse de rotation.

$\vec{V}(O \in R'/R) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}(R'/R) = \omega \vec{e_z}$

c) Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}'$

1- Déterminer, à partir de leurs définitions, les expressions de la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$ et de l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R}')$ de M dans $\mathcal{R}'$, en fonction des coordonnées cylindriques de M et de leurs dérivées temporelles.

$$\vec{OM} = \rho \vec{e_\rho} \Rightarrow \vec{v}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}$$

2- Déterminer, dans la base cylindrique liée à $\mathcal{R}'$, les expressions de la vitesse d'entraînement $\vec{v_e}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ et des accélérations d'entraînement $\vec{a_e}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ et de Coriolis $\vec{a_c}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, liées à M, dans le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\vec{v_e}(M, R'/R) = \vec{v}(O' \in R'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \times \vec{O'M}$$
$$= \vec{0} + \omega\vec{e_z} \times \rho\vec{e_\rho} = \omega\rho\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{a_e}(M, R'/R) = \underbrace{\vec{a}(O' \in R'/R)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\left[\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right]_R}_{=\vec{0}} \times \vec{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R) \times [\vec{\Omega}(R'/R) \times \vec{O'M}]$$
$$= \omega\vec{e_z} \times (\omega\rho\vec{e_\varphi}) = -\omega^2\rho\vec{e_\rho}$$

$$\vec{a_c}(M, R'/R) = 2\vec{\Omega}(R'/R) \times \vec{v}(M/R')$$
$$= 2\omega\vec{e_z} \times (\dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}) = 2\omega(\dot{\rho}\vec{e_\varphi} - \rho\dot{\varphi}\vec{e_\rho})$$

3- Déduire de la RFD dans $\mathcal{R}'$ les relations liant les coordonnées cylindriques, leurs dérivées et ω.

$$\sum\vec{F}(M/R') = \underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{=\vec{0}} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = m\vec{a}(M/R')$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R') = -\vec{a_e}(M, R'/R) - \vec{a_c}(M, R'/R)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = +\omega^2\rho + 2\omega\rho\dot{\varphi} \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = -2\omega\dot{\rho} \end{cases} \xRightarrow{\rho=\rho_0=cte} \begin{cases} -\dot{\varphi}^2 = \omega^2 + 2\omega\dot{\varphi} & (\alpha) \\ \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = cte & (\beta) \end{cases}$$

4- Pour un "observateur assis sur le disque en O" (donc fixe dans $\mathcal{R}'$), quel est le mouvement de M ?

$$(\alpha) \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + 2\omega\dot{\varphi} + \omega^2 = 0 \Rightarrow (\dot{\varphi} + \omega)^2 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = -\omega$$

Donc l'observateur en O sur $\mathcal{D}$ voit M tourner "en sens inverse"